Premier problème

Soit (R) = $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ le repère de référence orthonormé direct auquel on rapporte le mouvement de deux mobiles ponctuels M et P.

M parcourt l'axe $O\vec{j}$ d'un mouvement uniforme de vitesse v : $\overrightarrow{OM} = vt\,\vec{j}$

P est animé d'un mouvement uniforme de vitesse 2v ; il part, à la date t = 0, du point A défini par $\overrightarrow{OA} = a\,\vec{i}$

a et v sont des mesures positives.

On écrit le vecteur vitesse $\vec{v}(P)$ du mobile P par rapport à (R) :

$$\vec{v}(P) = 2v\,\vec{u}(\phi)$$

avec : $\vec{u}(\phi) = \vec{i}\cos\phi + \vec{j}\sin\phi$

et on suppose que M est à toute date sur le support du bipoint $\overrightarrow{PQ} = 2v\,\vec{u}(\phi)$. (On dit que P poursuit M)

1°) Exprimer les relations différentielles traduisant les hypothèses faites sur le mouvement de l'ensemble (M,P) et en déduire notamment que :

$$2x + \cos\phi\,\frac{dx}{d\phi} = 0 \qquad \text{où} \quad \overrightarrow{OP} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$$

Quelle est l'expression de l'abscisse x de P en fonction de $q = \operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2})$ si on suppose que $\phi = \pi$ à la date t = 0.

2°) Exprimer l'ordonnée y de P en fonction de q ; déterminer l'équation cartésienne de la trajectoire de P et effectuer le tracé de cette trajectoire (Γ).

3°) Exprimer en fonction de q la longueur s de l'arc AP de (Γ) ; en déduire la longueur du trajet parcouru par P lorsqu'il rattrape M.

4°) Déterminer l'expression de l'accélération $\vec{\gamma}$ du mobile P et en déduire la valeur (en fonction de q) du rayon de courbure de (Γ) en P.

TSVP

Centre d'Etudes Supérieures des Techniques Industrielles
.Mecanique
page 239
1987

Centre d'Etudes Supérieures des Techniques Industrielles
Marseille

Deuxième problème

Soit (R) = $(O|\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ le repère de référence orthonormé direct auquel on rapporte le mouvement du mobile ponctuel M ; la position de M à la date t est exprimée par :

$$\overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}.$$

On suppose
qu'à la date $t = 0$: $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$,
que la vitesse $\vec{v}$ de M par rapport à (R) à la date t est :

$$\vec{v} = \omega[\vec{i}(2x - 2y + z) + \vec{j}(2x - 3y + 2z) + \vec{k}(-x + 2y)]$$

où ω est une constante positive (s'exprimant en s^{-1}) qui interviendra dans la suite sans qu'on ait à le rappeler.

1°) Exprimer (x,y,z) en fonction de (x_0,y_0,z_0,t).

A cet effet on pourra chercher plusieurs solutions particulières linéairement distinctes :

$$x = A\,e^{rt}, \quad y = B\,e^{rt}, \quad z = C\,e^{rt}$$

$(A,B,C) \neq (0,0,0)$.

2°) Soit μ la matrice à 3 lignes et 1 colonne $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Soit μ_0 la matrice à 3 lignes et 1 colonne $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$

déterminer la matrice f (à 3 lignes et 3 colonnes) définie par

$$\mu = f\,\mu_0$$

et vérifier que

$$f = a\,e^{\alpha\omega t} + b\,e^{\beta\omega t}$$

où : α est un entier positif, β est un entier négatif
a et b sont deux matrices indépendantes de t (à 3 lignes et 3 colonnes).

3°) Calculer a^2, b^2, ab et ba,

ainsi que le produit f.g où

$$g = a\,e^{-\alpha\omega t} + b\,e^{-\beta\omega t}$$

4°) Déterminer l'inverse f^{-1} de f.

5°) Exprimer l'accélération $\vec{\gamma}$ de M à la date t en fonction de (x,y,z).

6°) Quelles conditions doivent remplir les valeurs initiales (x_0,y_0,z_0) pour que la trajectoire de M soit rectiligne ?

Troisième problème

Dans le repère orthonormé direct (R) = $(O|\vec{i},\vec{j},\vec{k})$
la trajectoire de M est définie par

$\overrightarrow{OM} = a[\vec{i}\,\alpha^2 + \vec{j}\,\alpha\beta + \vec{k}(2\alpha + \beta^2)]$, a constante positive.

α et β sont deux fonctions de t, deux fois dérivables par rapport à t à dérivées (α',α''), (β',β'').

1°) Déterminer les composantes cartésiennes de la vitesse $\vec{v}$ et de l'accélération $\vec{\gamma}$ de M.

2°) L'ensemble des trajectoires possibles de M est une surface (S) dont on demande l'équation cartésienne.

3°) Ecrire l'équation cartésienne du plan (P) tangent en M à (S) et étudier l'intersection de (P) et de (S). Afin d'étudier cette intersection on pourra chercher la relation entre h et k pour que le point $M'(\alpha+h,\beta+k)$ de (S) appartienne à (P), obtenir k en fonction de h et exprimer $\overrightarrow{MM'}$ en fonction de h et des vecteurs :

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial \alpha} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \vec{f}}{\partial \beta}$$

où $\vec{f} = \overrightarrow{OM}$.

- FIN -